PARAGRAAF 10.1 : SNELHEDEN EN RAAKLIJNEN

LES 1 HELLING TUSSEN TWEE PUNTEN

DEFINITIES

- Differentiequotiënt = { Gemiddelde helling }
- Differentiequotiënt = { r.c. van de lijn door deze twee punten}
- Differentiequotiënt op interval [x_a , x_b] = $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$
- Helling = Snelheid (bijv. m/s)

VOORBEELD 1

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 3$.

a. Bereken het differentiequotiënt op $[2,6]$

b. Bereken de gemiddelde helling / snelheid op $[-4,-1]$

OPLOSSING 1

a. Differentiequotiënt op interval $[2\,,6]$ $= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_6 - y_2}{x_6 - x_2} = \frac{39-7}{6-2} = \frac{32}{4} = 8$

Dit betekent dat als je één naar echts gaat, je met 8 omhoog gaat (r.c. van de lijn door deze twee punten)

b. Gemiddelde helling / snelheid op $[-4\,,-1]$ $= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{-1} - y_{-4}}{x_{-1} - x_{-4}} = \frac{4-19}{-1+4} = \frac{-15}{3} = -5$

LES 2 BENADERING VAN DE HELLING IN EEN PUNT

VOORBEELD 1

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 3$.

Bereken de helling in $x = 2$

OPLOSSING 1

Een goede benadering is om een heel klein interval rond x = 2 te nemen en het differentiequotiënt uit te rekenen dus bijvoorbeeld op interval [2 ; 2,01]
(Dan is Δx=0,01) :

(1) Bereken bij beide x-en de y-waarden :

$x = 2 \rightarrow y = 2^2 + 3 = 7$ dus $A = (2{,}7)$

$x = 2{,}01 \rightarrow y = 2{,}01^2 + 3 = 7{,}0401$ dus $B = (2{,}01\,;\,7{,}0401)$

(2) Differentiequotiënt op interval $[2\,;\,2{,}01] =$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{2,01} - y_2}{x_{2,01} - x_2} = \frac{7{,}0401 - 7}{0{,}01} = \frac{0{,}0401}{0{,}01} = 4{,}01 \approx 4$$

(3) Dus de helling in $x = 2$ is 4.

OPMERKING

- Soms moet je eerst een raaklijn tekenen. Pak twee punten van deze raaklijn en bereken daarmee de helling (in dat punt).
- Als $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ is de formule stijgend. Is $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ dan is de formule dalend.

LES 2 : RAAKLIJN OPSTELLEN

STAPPENPLAN RAAKLIJN OPSTELLEN BIJ X = 3

(1) Algemene vergelijking van een lijn (en dus ook van een raaklijn) → $y = ax + b$

(2) Bereken de y-coördinaat.

(3) Bereken de a = rc met knop dy/dx op GR.

(4) Bereken b door x, y en a in te vullen bij $y = ax + b$.

(5) Geef de vergelijking van de raaklijn.

VOORBEELD 1

Gegeven is de functie $f(x) = 2x^2 - 3x + 10$. Bepaal de raaklijn in x=3

OPLOSSING 1

(1) Algemene vergelijking raaklijn → $y = ax + b$

(2) $y = f(3) = 19$

(3) $Y1 = 2x^2 - 3x + 10$

Calc → $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} \to 3 \to a = 9$

(4) Je weet $y = 9x + b$

Je weet ook het punt $(3,19)$

Invullen geeft $19 = 9 \cdot 3 + b$

$b = -8$

(5) Dus raaklijn : $y = 9x - 8$.

PARAGRAAF 10.2 : RAAKLIJNEN EN HELLINGGRAFIEKEN

LES 1 : VERBAND TUSSEN F(X) EN F ’(X)

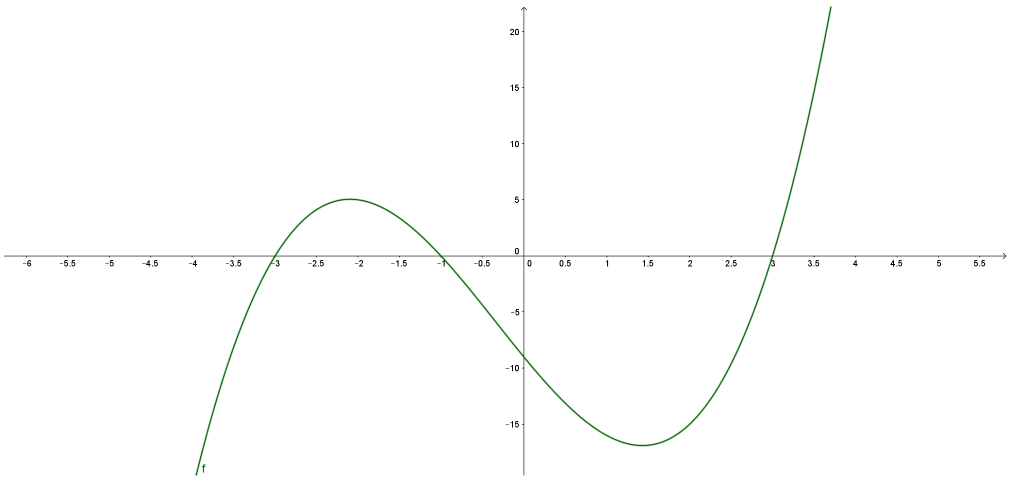
DEFINITIES

- f’(x) = { de hellinggrafiek van f(x) }

VOORBEELD 1

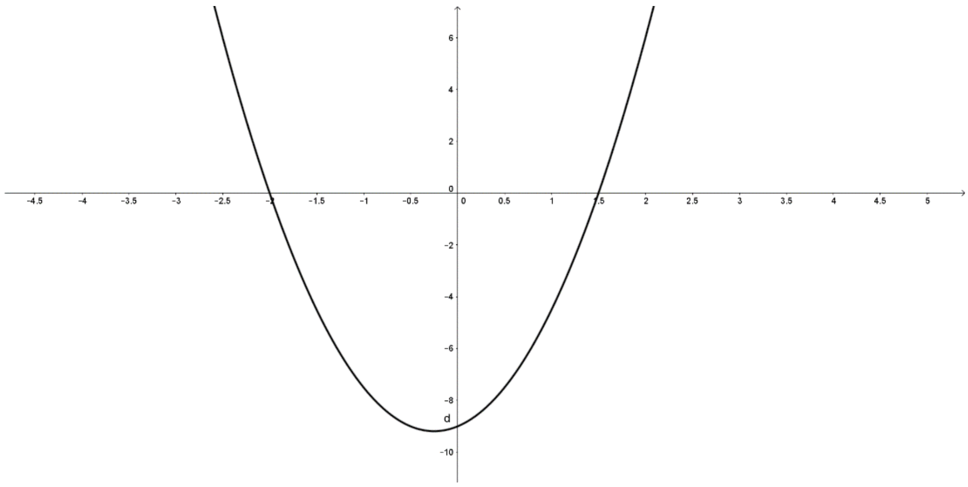
Gegeven is de grafiek hierbeneden.

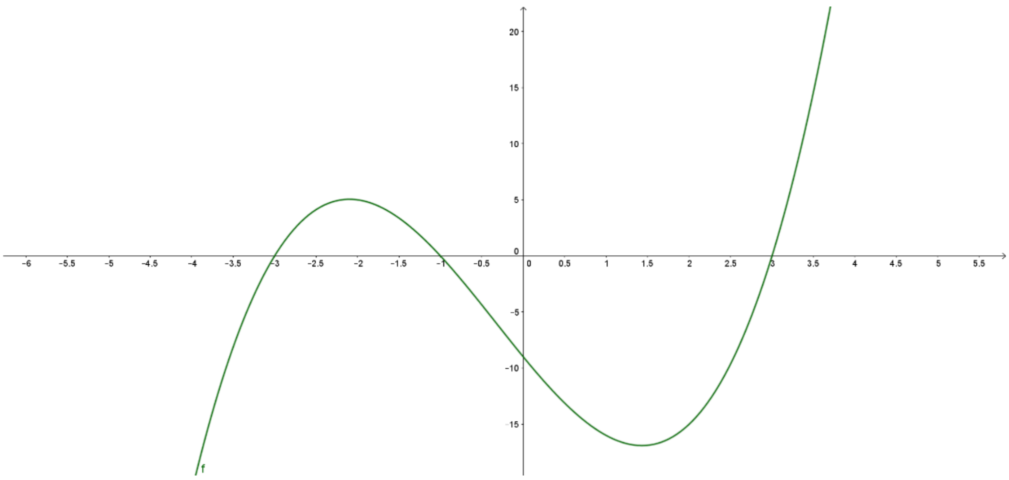
a. Stel dat is de grafiek van f(x). Teken op basis hiervan f’(x)
b. Stel dat is de grafiek van g’(x). Teken op basis hiervan g(x)



OPLOSSING 1

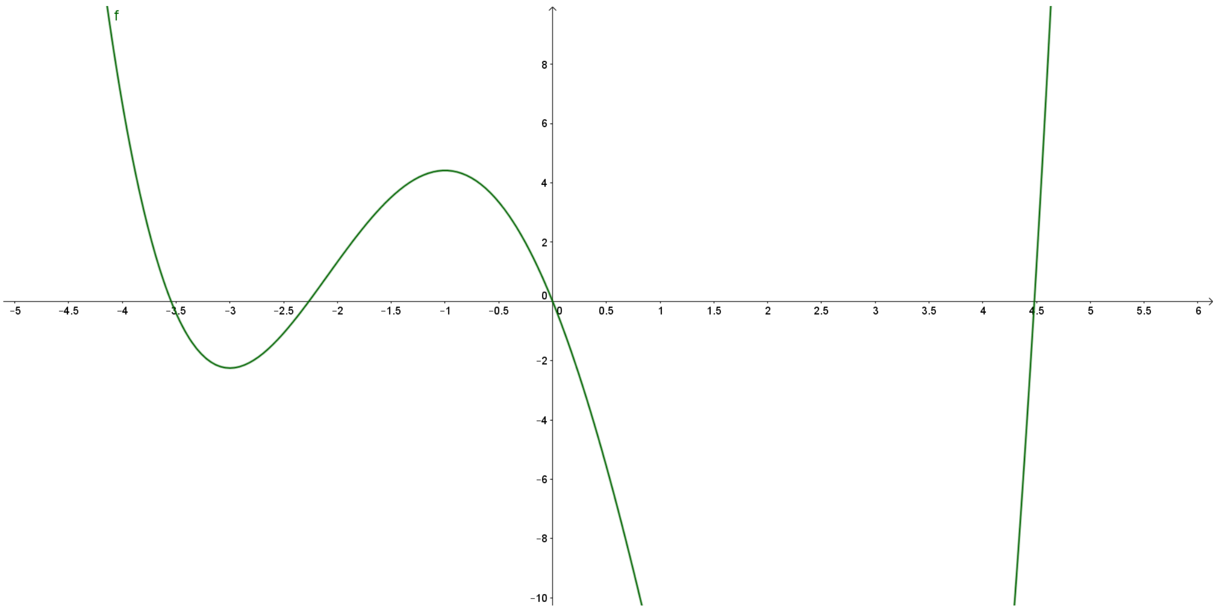
a. **(1)** In de toppen is f'(x) = 0. Dus bij x = -2 en x = 1,5.
(2) Links van x = -2 is de grafiek stijgend. Dus f'(x) is positief
(3) Rechts van x = 1,5 is de grafiek stijgend. Dus f'(x) is positief
(4) Tussen x = -2 en x = 1,5 is de grafiek dalend. Dus f'(x) is negatief.
Dit geeft :





b. **(1)** Waar g'(x) = 0 zijn bij g(x) toppen. Dus bij x = -3, x = -1 en x = 3.
(2) Links van x = -3 en tussen -1 en 3 is g'(x) is negatief. Dus is de grafiek daar dalend.
(3) Rechts van x = 3 en tussen -3 en -1 is g'(x) is positief. Dus is de grafiek daar stijgend.

Dit geeft :



LES 2 : DIFFERENTIËREN

Als je iedere keer de helling moet bepalen op deze manier, dan is dat erg veel werk. Dit is al door iemand gedaan. Deze techniek heet differentiëren.

DEFINITIES

- Differentiëren = { Hellingfunctie berekenen }
- Afgeleide bepalen = { Hellingfunctie berekenen }

DIFFERENTIEERREGELS

(1) Hoofdregel differentiëren : $f(x) = a \cdot x^n \rightarrow f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$

(2) Hulpregel 1 : $f(x) = a \cdot x \rightarrow f'(x) = a$

(3) Hulpregel 2 : $f(x) = a \rightarrow f'(x) = 0$

VOORBEELD 1

Differentieer

a. $f(x) = 6x^4$

b. $f(x) = 4x + 7$

c. $f(x) = 3x^5 - 7x^3 + 6x - 3$

d. $f(x) = (3x - 7x^2)(6x + 2)$

e. $f(x) = ax^2 + 3x + 2a$

OPLOSSING 1

Differentieer

a. $f'(x) = 4 \cdot 6 \cdot x^{4-1} = 24x^3$

b. $f'(x) = 4 + 0 = 4$

c. $f'(x) = 15x^4 - 21x^2 + 6$

d. $f(x) = (3x - 7x^2)(6x + 2) = 18x^2 + 6x - 42x^3 - 14x^2$
$f(x) = - 42x^3 + 4x^2 + 6x$
$f'(x) = -126x^2 + 8x + 6$

e. $f'(x) = a \bullet 2x + 3 + 0 = 2ax + 3$

PARAGRAAF 10.3 : RAAKLIJNEN EN EXTREME WAARDEN

VOORBEELD 1

Gegeven is de functie $f(x) = 9x^2 + 36x$.

a. Bereken algebraïsch de helling in $x = 3$.

b. Bereken algebraïsch de coördinaat waar de helling gelijk is aan -9.

c. Bereken algebraïsch de raaklijn in $x = 2$.

d. Bereken algebraïsch de coördinaten van de top.

OPLOSSING 1

a. $f'(x) = 18x + 36$
Helling in x=3 is : $f'(3) = 18 \cdot 3 + 36 = 90$

b. $f'(x) = -9$ dus $18x + 36 = -9$
$18x = -45$
$x = -2½$

$y = f(-2½\ ) = 9(-2½)2 + 36(-2½) = -33\frac{3}{4}$
Coördinaat $A = (-2½\,,\ -33\frac{3}{4})$

c. Neem het stappenplan erbij. Alleen stap 3 kan nu sneller :

(1) Algemene vergelijking raaklijn → $y = ax + b$

(2) $y = f(2) = 108$

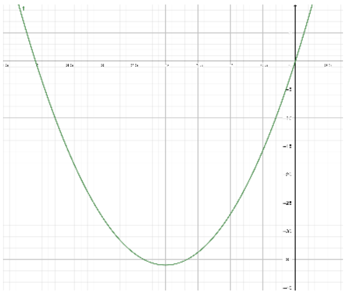
(3) $f'(x) = 18x + 36$
$a = f'(2) = 72$

(4) Je weet $y = 72x + b$.
Invullen van $(2{,}108)$ geeft :
$108 = 72 \cdot 2 + b$
$b = -36$

(5) Dus raaklijn : $y = 72x - 36$

d. In de top geldt : HELLING = 0 → $f'(x) = 0$

$f'(x) = 18x + 36 = 0$
$18x = -36$
$x = -2$
$y = f(-2) = -36.$



Dus de top is $(-2, -36)$
Dit is een minimum (dalparabool)

OPMERKING

Soms wordt in plaats van $f'(x)$ de notatie $\frac{df}{dx}$ gebruikt.

PARAGRAAF 10.4 : DE AFGELEIDE VAN Y = AXN

VOORBEELD 1

Differentieer en schrijf zonder minmachten en gebroken machten (½ etc.)

a. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}$

b. $g(x) = \frac{3-x^2}{x^3}$

c. $h(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}}$

OPLOSSING 1

a. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} = x^{-1} + 4x^{-2}$

$f'(x) = -1x^{-2} - 8x^{-3} = \frac{-1}{x^2} - \frac{8}{x^3}$

b. $g(x) = \frac{3-x^2}{x^3}$

$g(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{x^2}{x^3} = 3x^{-3} - x^{-1}$

$g'(x) = -9x^{-4} + x^{-2} = \frac{-9}{x^4} + \frac{1}{x^2}$

c. $h(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}$

$h'(x) = -\frac{1}{8}x^{-1\frac{1}{2}} = -\frac{1}{8}\frac{1}{x^{1\frac{1}{2}}}$ $\left(= -\frac{1}{8}\frac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{8}\frac{1}{x\sqrt{x}} = -\frac{1}{8x\sqrt{x}}\right)$

PARAGRAAF 10.5 : EXTRA REGELS DIFFERENTIËREN PR / QR / KR

LES 1 : PRODUCTREGEL EN QUOTIËNTREGEL

DEFINITIES

Er zijn (voorlopig) twee hulpregels bij differentiëren :

(1) Productregel	: $h = f \cdot g \rightarrow h' = f' \cdot g + f \cdot g'$
(2) Quotiëntregel	: $f = \frac{t}{n} \rightarrow f' = \frac{n \cdot t' - t \cdot n'}{n^2} = \frac{n \cdot at - t \cdot an}{n^2}$

VOORBEELD 1

Differentieer

a. $h(x) = x^2(3x + 5)$

b. $f(x) = \frac{3x-4}{-2x+9}$

OPLOSSING 1

a. $f = x^2 \quad \rightarrow f' = 2x$

$g = 3x + 5 \quad \rightarrow g' = 3$

$h'(x) = 2x(3x + 5) + x^2 \cdot 3 = 6x^2 + 10x + 3x^2 = 9x^2 + 10x$

b. $t = 3x - 4 \quad \rightarrow t' = 3$

$n = -2x + 9 \rightarrow n' = -2$

$$f'(x) = \frac{(-2x+9) \cdot 3 - (3x-4) \cdot -2}{(-2x+9)^2} = \frac{-6x+27-(-6x+8)}{(-2x+9)^2} = \frac{19}{(-2x+9)^2}$$

LES 2 : DE KETTINGREGEL

VOORBEELD 1

Differentieer de functie $f(x) = (x^2 - 4x)^7$

POGING 1 : HAAKJES WEGWERKEN

Je haalt de haakjes weg. Maar dat is niet te doen !!!

POGING 2 : DE KETTINGREGEL GEBRUIKEN

Deze functie bestaat eigenlijk uit twee delen :

x → x^2 - 4x → $(x^2 - 4x)^7$. **(Stel u = x^2 - 4x)**

u → u^7

THEORIE KETTINGREGEL

Kettingregel : $f'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$

OPLOSSING 1A : MET U

(1) Neem $u = x^2 - 4x$ $\rightarrow u' = 2x - 4$
Dan is $f(u) = u^7$ $\rightarrow f'(u) = 7u^6$

(2) $f'(x) = f'(u) \cdot u'(x) = 7u^6 \cdot (2x - 4) = 7(x^2 - 4x)^6 \cdot (2x - 4)$

OPLOSSING 1B : SNELLE MANIER

$f'(x) = 7(x^2 - 4x)^6 \cdot (2x - 4)$

× afgeleide

VOORBEELD 2

Differentieer

a. $f(x) = \sqrt{5x+2}$

b. $g(x) = 3x + 7 - \sqrt{10-4x}$

OPLOSSING 2

We lossen dit op, op de snelle manier.

a. $f(x) = \sqrt{5x+2} = (5x+2)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(5x+2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 5 = 2\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(5x+2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\frac{1}{2}}{(5x+2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\frac{1}{2}}{\sqrt{5x+2}}$$

b. $g(x) = 3x + 7 - \sqrt{10-4x} = 3x + 7 - (10-4x)^{\frac{1}{2}}$

$$g(x) = 3 - \frac{1}{2}(10-4x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -4 = 3 + 2\frac{1}{(10-4x)^{\frac{1}{2}}} = 3 + \frac{2}{(10-4x)^{\frac{1}{2}}} = 3 + \frac{2}{\sqrt{10-4x}}$$

OPMERKING KETTINGREGEL

De uitleg van de kettingregel is als volgt :

(1) Je kunt de afgeleide ook schrijven als $f'(x) = \frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}}$

(2) Dit geeft :

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dx} \times \frac{du}{du} = \frac{df \cdot du}{dx \cdot du} = \frac{df \cdot du}{du \cdot dx} = \frac{df}{du} \times \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot u'(x)$$

(3) Dus $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \mathrm{f}'(\mathrm{u}) \cdot \mathrm{u}'(\mathrm{x})$

LES 3 : DE KETTINGREGEL SAMEN MET DE PRODUCTREGEL (PR) OF QUOTIËNTREGEL (QR)

Soms krijg je meerdere regels gecombineerd. Er geldt dan de volgende regel

(1) Eerst PR of QR toepassen

(2) Dan pas de kettingregel toepassen (kan ook binnen de QR of PR nodig zijn).

VOORBEELD 1

Differentieer de functie $f(x) = 9x(x^2 - 6x)^5$

OPLOSSING 1

(1) Eerst de productregel geeft :

$g = 9x \quad \rightarrow g' = 9$

$h = (x^2 - 6x)^5 \quad \rightarrow h' = 5(x^2 - 6x)^4 \cdot (2x - 6)$

× afgeleide

(2) Nu de productregel

$f'(x) = 9 \cdot (x^2 - 6x)^5 + 9x \cdot 5(x^2 - 6x)^4 \cdot (2x - 6)$

$f'(x) = 9(x^2 - 6x)^5 + 45x(x^2 - 6x)^4 \cdot (2x - 6)$